Lavendhomme René

Note sur les tresses [1]

Ceci n’est qu’un texte d’initiation mathématique. C’est dire que, d’une part, je ne me suis aucunement préoccupé des éventuelles applications à la psychanalyse ; il s’agit de mathématiques même si ce sont des psychanalystes qui m’ont demandé ce travail. Et d’autre part, il s’agit d’initiation ; j’en resterai donc à un niveau assez élémentaire. Il n’y aura ici aucun résultat neuf ou difficile. Ce qui est recherché c’est l’intelligence de l’objet mathématique.

Le thème retenu est celui des tresses et c’est à la description du groupe des tresses que sera consacrée la première partie. Dans la deuxième partie nous parlerons du bouclage des tresses qui fournit en fait tous les nœuds et entrelacs. Enfin la troisième partie évoquera la catégorie des enchevêtrements.

I.- Les groupes de tresses

Le dessin suivant évoque une tresse à trois brins

[1] Je remercie Christian Centner de m’avoir donné l’occasion de faire cet exposé lors de la journée d’étude sur les noeuds qu’il a organisée à Bruxelles.

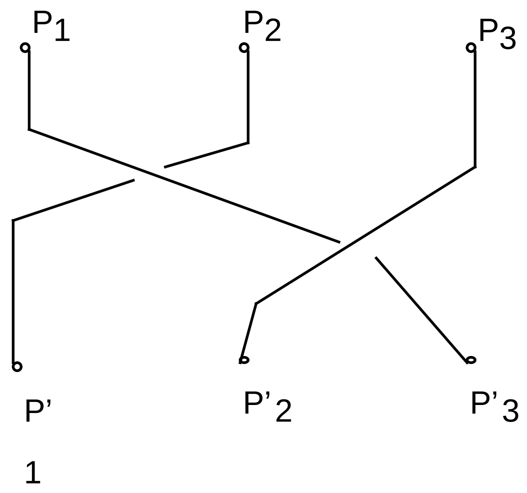


Fig 1

Elle est constituée de trois fils reliant trois origines fixées (les points P_1,P_2,P_3) à trois extrémités fixées (les points P'_1,P'_2,P'_3). On peut imaginer que ces fils soient extensibles et mobiles horizontalement tout en conservant les extrémités fixes. Évidemment; il faudra dire avec plus de précisions quand deux tresses sont équivalentes.

a) Je définirai d'abord une <u>tresse géométrique à n brins</u>.

Considérons deux familles de n points (P_1, P_2,... ,P_n) et (P'_1, P'_2, ..., P'_n). Pour fixer l'imagination, disons que les P_i et les P'_i sont situés sur deux segments parallèles, le premier segment étant vu comme au-dessus du second. On peut aussi fixer les choses en pensant que les points sont toujours à la même distance de leurs voisins. Toutes ces précisions vont vite s'avérer inutiles. L'essentiel sera finalement le nombre n, le nombre de points.

Une tresse géométrique à n brins de (P_1,P_2,...,P_n) vers (P'_1,P'_2,...,P'_n) est une famille de n arcs de courbe[2] (c_1,c_2,...,c_n) dans l'espace tels que

---

[2] On peut dire qu'un arc de courbe est l'image du segment [0,1] par une fonction continue prenant ses valeurs dans l'espace usuel. En pratique, nous dessinerons ces courbes comme des lignes

1) L'origine de c_i est P_i .

2) Les extrémités des divers c_i sont les divers P'_j (normalement dans le désordre : dans l'exemple ci-dessus c_1 va de P_1 à P'_3, c_2 va de P_2 à P'_1 et c_3 va de P_3 à P'_2). On peut tout aussi bien dire que l'on a une permutation σ des nombres (1,2,...,n) et que c_1 va de P_1 à $P_{\sigma(1)}$, c_2 va de P_2 à $P_{\sigma(2)}$, et ainsi de suite.

3) Ces arcs ne se coupent pas. En pratique dans un dessin lorsque deux traits peuvent paraître se couper (parce que le dessin est plan tandis que "l'objet" est dans l'espace tridimensionnel), il faut toujours penser qu'un d'eux est à l'arrière de l'autre. La convention de dessin usuelle est de faire comme si le trait situé à l'arrière s'interrompait en passant derrière l'autre).

4) Ils vont en descendant, c'est-à-dire que chaque arc c_i a exactement un point d'intersection avec chaque plan horizontal intermédiaire entre le plan supérieur (contenant le segment portant les points P_i) et le plan inférieur (contenant, lui, les points P'_i).

Voici un exemple de tresse à 5 brins

---

brisées mais continues (disons des segments mis bout à bout), mais on pourrait tout aussi bien demander que ces courbes soient "lisses" en un sens technique qui serait alors à préciser (disons simplement que les angles des lignes brisées seraient "arrondis").

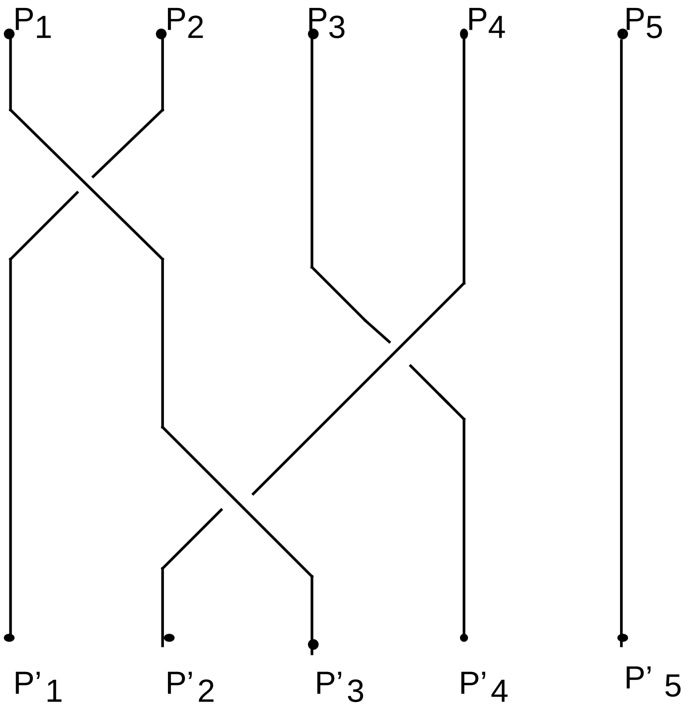
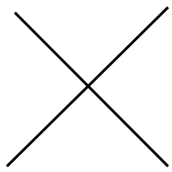


Fig 2

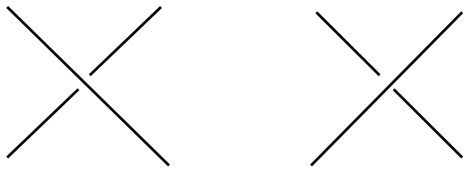
(On a la permutation σ donnée par $\sigma(1)=3$, $\sigma(2)=1$, $\sigma(3)=4$, $\sigma(4)=2$, $\sigma(5)=5$ ce qu'on peut écrire σ =

$$\begin{pmatrix} I & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 1 & 4 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

En vertu de la condition 3, ceci n'est pas une tresse

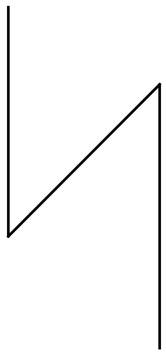


bien définie. Car il faut choisir entre les deux suivantes



qui, elles, sont des tresses.

En vertu de la condition 4 , ceci n'est pas un brin de tresse acceptable :



et de même une courbe à deux bouts mais comportant en son milieu un nœud, n'est pas un brin de tresse acceptable, car la condition (4) ne peut être satisfaite.

b) Il faut maintenant dire quand deux tresses à n brins seront considérées comme “les mêmes”. Disons, plus correctement, seront considérées comme “équivalentes”. On dit que deux tresses géométriques à n brins sont équivalentes si on peut les déformer continûment l'une en l'autre de sorte qu'à chaque stade intermédiaire on ait toujours une tresse géométrique et que les extrémités des brins restent fixes.

Voici deux exemples importants de deux tresses équivalentes :

(i) Les deux tresses suivantes sont équivalentes

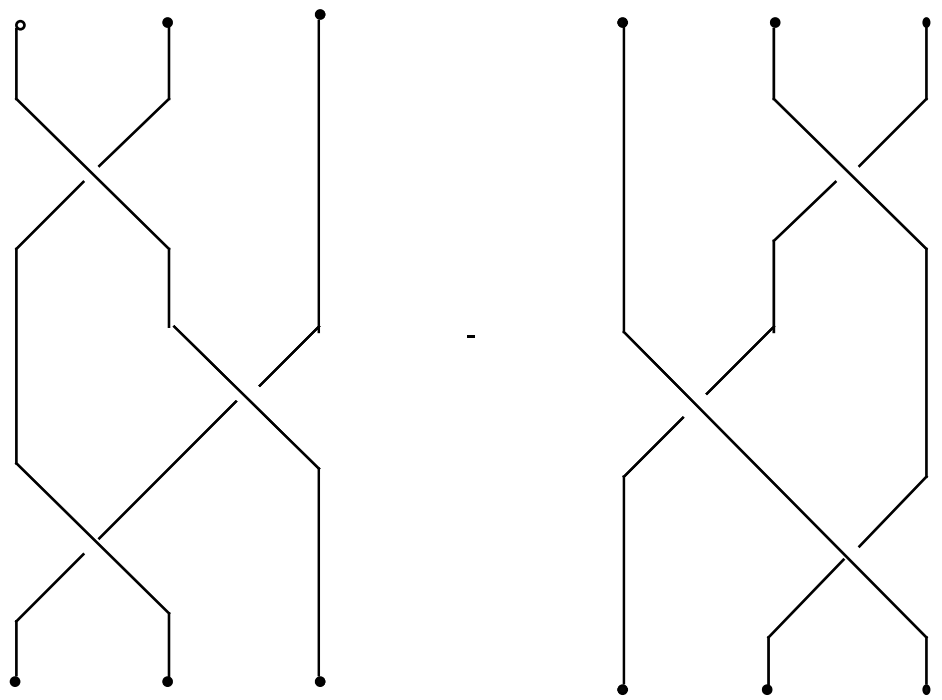


Fig 3

(ii) Les deux tresses suivantes sont équivalentes

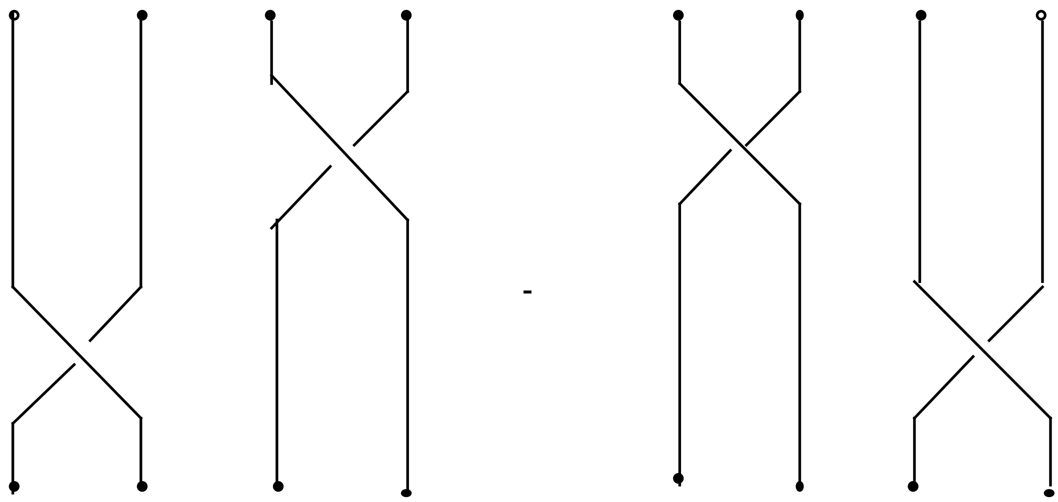


Fig 4

Une classe de tresses géométriques à n brins équivalentes entre elles sera appelée une tresse à n brins.

c) Soit B(n) l'ensemble des tresses à n brins. Nous allons faire quelques commentaires sur le théorème de Artin (1925):

Théorème : B(n) est un groupe.

(i) Indiquons d'abord comment on compose deux tresses T_1 et T_2 : Si T_1 va de $(P_1,P_2,...,P_n)$ vers $(P'_1,P'_2,...,P'_n)$ et T_2 va de $(Q_1,Q_2,...,Q_n)$ vers $(Q'_1,Q'_2,...,Q'_n)$, on identifie $(Q_1,Q_2,...,Q_n)$ avec $(P'_1,P'_2,...,P'_n)$ en plaçant la tresse T_2 en dessous de la tresse T_1. On obtient ainsi la tresse composée que l'on note T_2 o T_1. Voici un exemple de composition :

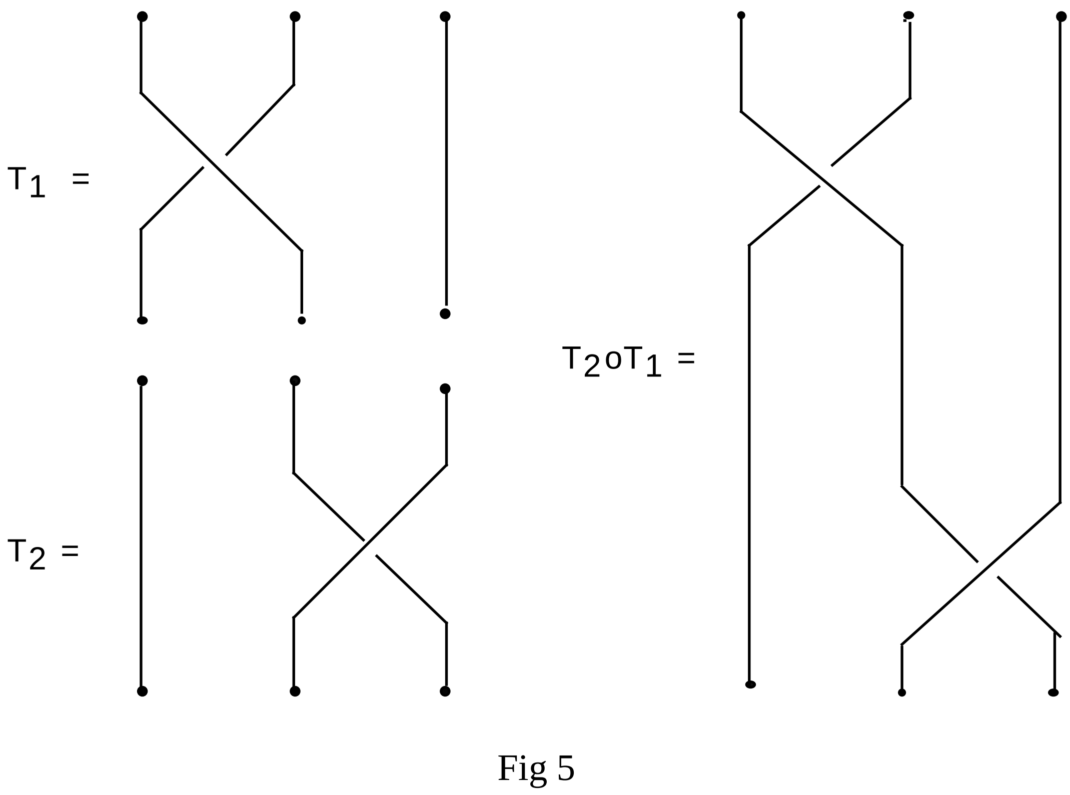
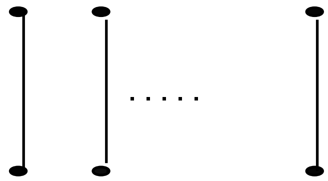


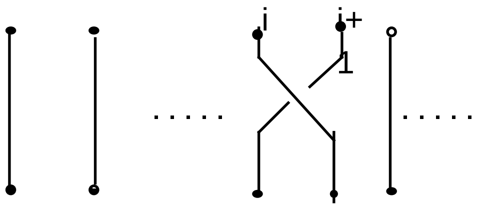
Fig 5

(ii) On peut vérifier que toute tresse est un composé de tresses élémentaires que sont les tresses ε, σ_i et σ'_i que voici :

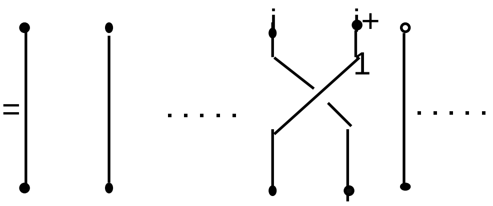
$\varepsilon_n = \varepsilon =$



$\sigma_i =$



$\sigma'_i =$



:

Fig 6

Par exemple :

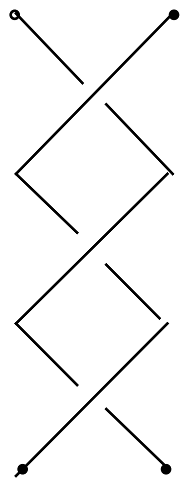


Fig 7

est σ_1 o σ_1 o σ_1 . Et :

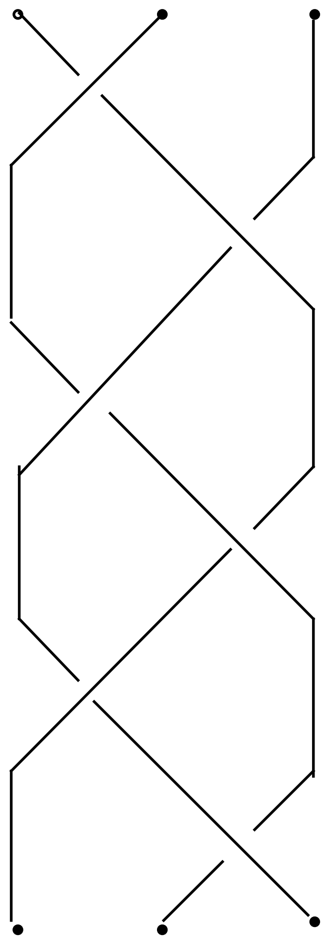


Fig 8

est σ'_1 o σ_2 o σ'_1 o σ_2 o σ'_1 o σ_2.

On peut en fait décrire toutes les tresses à n brins par les suites de n lettres σ_i , σ'_i et ε avec les relations suivantes :

(1) ε est sans effet pour la composition : par exemple $\sigma_i\varepsilon=\sigma_i$ ou $\varepsilon\varepsilon = \varepsilon$ ou $\varepsilon\sigma'_i=\sigma'_i$.

(2) σ'_i est l'inverse de σ_i en ce sens que : $\sigma_i o \sigma'_i = \sigma'_i o \sigma_i = \varepsilon$.

(3) $\sigma_i \circ \sigma_j = \sigma_j \circ \sigma_i$ si i et j diffèrent d'au moins deux unités. Un exemple typique de cette équivalence est fourni par la figure 4.

(4) $\sigma_i \circ \sigma_{i+1} \circ \sigma_i = \sigma_{i+1} \circ \sigma_i \circ \sigma_{i+1}$. Un exemple typique de cette relation est donné par la figure 3. C'est en fait la seule relation qui ne soit pas tout à fait triviale. Elle est connue sous le nom de "relation d'Artin".

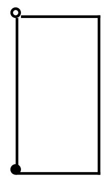
(iii) Il est évident que la composition est associative, que ε est un élément neutre et que tout élément possède un inverse. Par exemple l'inverse de $(\sigma_i \circ \sigma_j \circ \sigma'_k \circ \sigma_l)$ est $(\sigma'_l \circ \sigma_k \circ \sigma'_j \circ \sigma'_i)$. On obtient donc bien un groupe. C'est le contenu du théorème d'Artin.

2. Tresses et entrelacs

Rappelons d'abord la définition d'un nœud ou d'un entrelacs. Un nœud est "la même chose" du point de vue de la topologie générale qu'un cercle. C'est un cercle tracé dans l'espace à trois dimensions. Bien sûr il faut préciser quand deux nœuds sont équivalents : c'est lorsque on peut déformer un nœud en l'autre de manière continue de sorte qu'à chaque stade intermédiaire on ait toujours un nœud (ce qui revient à dire qu'à chaque stade intermédiaire la courbe ne se coupe pas elle même). Un entrelacs est une réunion d'un nombre fini de nœuds (ne se coupant pas dans l'espace). Un entrelacs à un seul rond est un nœud. Comme exemple bien connu d'entrelacs citons l'entrelacs borroméen formé, comme il est bien connu, de trois ronds.

À une tresse T on associe un entrelacs en reliant P_i à P'_i par un arc s_i ne croisant aucun brin de la tresse T et aucun des autres s_j. On dit que l'on obtient ainsi le bouclage de la tresse T. Par exemple le bouclage de la tresse (triviale) à un brin

est le nœud trivial qu’est le “rond” :



(cela peut être bien déformé en un cercle mais nous avons convenu de ne dessiner que des lignes brisées !)

De même le bouclage de la tresse

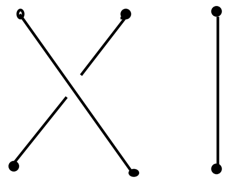


Fig 9

est l’entrelacs

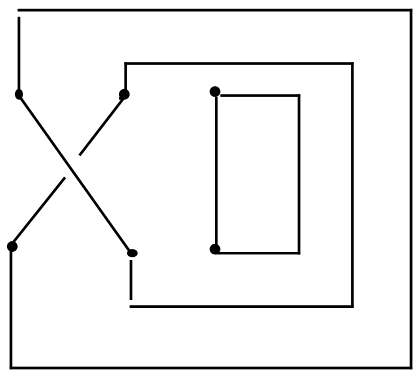


Fig 10

qui est simplement un entrelacs à deux ronds séparés.

On peut montrer que tout entrelacs est le bouclage d’une tresse[3] . Par exemple le nœud de trèfle droit est le bouclage de la tresse de la figure 7 à savoir :

---

[3] Cela a été démontré par Alexander dans les années 20.

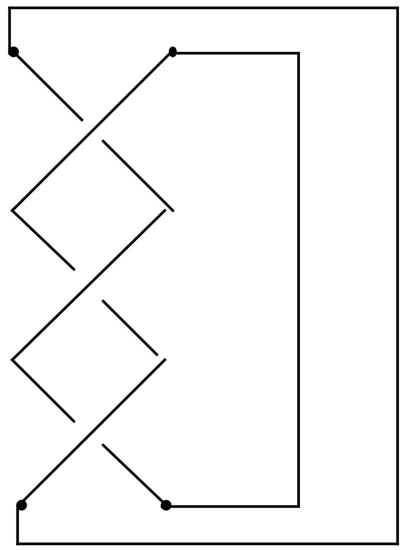


Fig 11

Un autre exemple : l’entrelacs formé de deux ronds enchaînés est le bouclage de la tresse σ1 o σ1 :

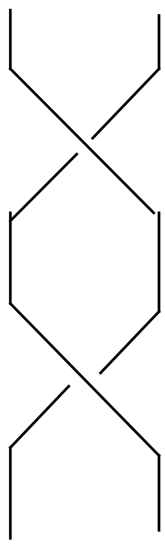


Fig 12

Enfin il faut évidemment signaler que l’entrelacs borroméen à trois ronds est le bouclage de la tresse de la figure 8 :

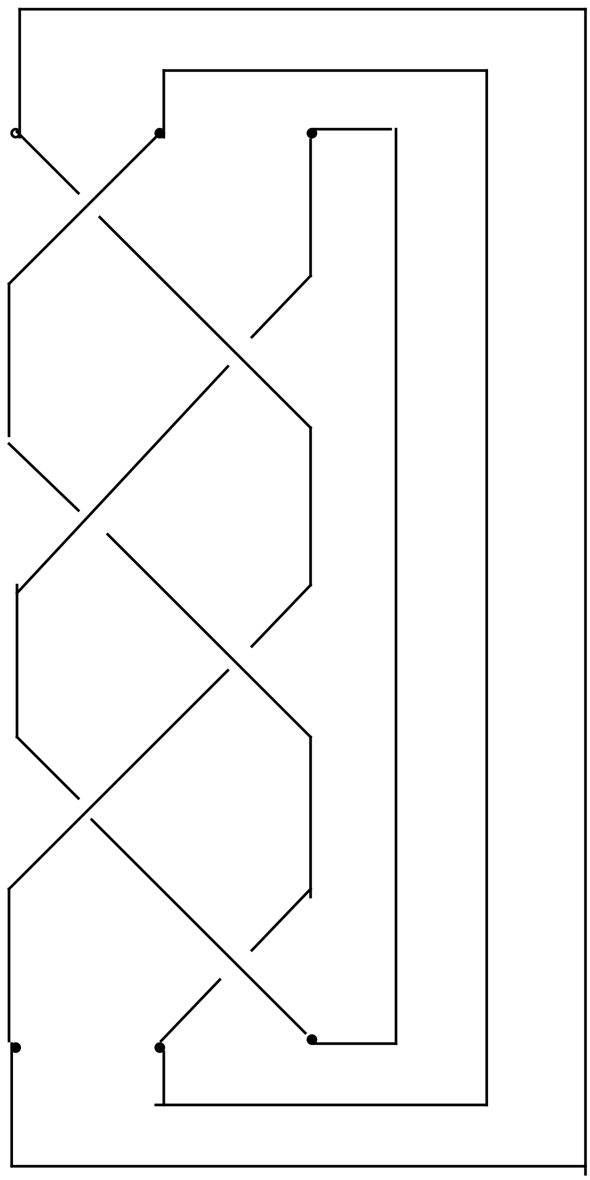


Fig 13

Nous l’avons dit, tout entrelacs est le bouclage d’une tresse. En particulier tout nœud est le bouclage d’une tresse.

Mais deux tresses non équivalentes peuvent donner, par bouclage, des entrelacs équivalents. Le cas le plus simple est le suivant: la tresse σ_1 à deux brins n’est pas équivalente comme tresse à la tresse ε_1 à un brin et pourtant leur bouclage sont équivalents comme nœuds, et équivalents au nœud trivial :

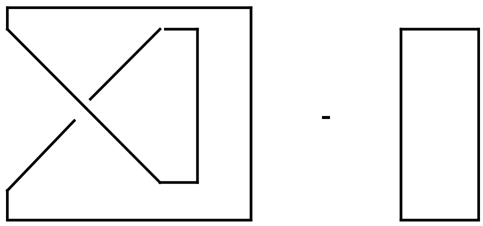


Fig 14

Un autre exemple (où les tresses ont cette fois le même nombre de brins) est que le bouclage des tresses σ_1 et σ'_1 à deux brins donnent le nœud trivial. De même les tresses à trois brins σ_1 o σ_2 o σ'_1 et σ_2 donnent par bouclage l’entrelacs trivial à deux ronds: Le bouclage de σ_1 o σ_2 o σ'_1 donne :

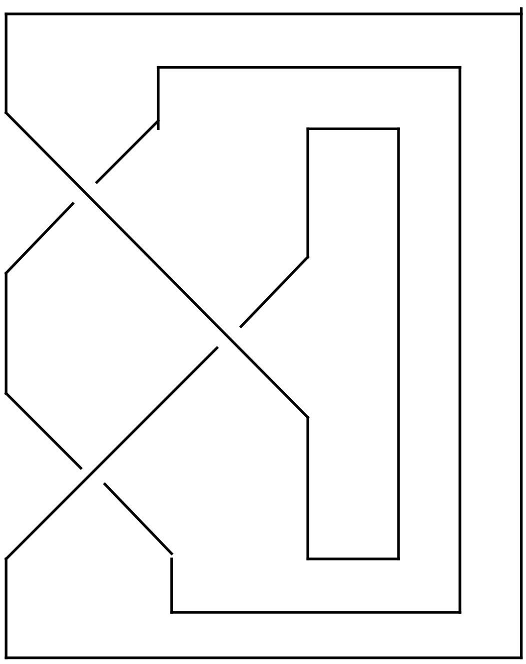


Fig 15

tandis que le bouclage de σ_2 est

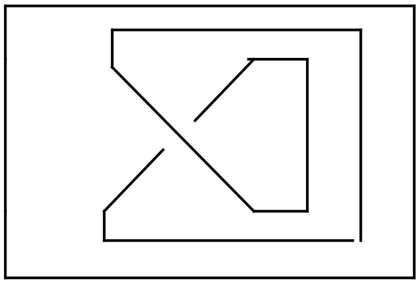


Fig 16

Et ce sont l'une et l'autre l'entrelacs trivial à deux ronds.

Mais Markov a montré (vers 1940) que l'on peut caractériser l'équivalence de nœuds (ou d'entrelacs) uniquement avec des tresses. Deux tresses T_1 et T_2 donnent, par bouclage, des nœuds équivalents si et seulement si on peut passer de T_1 à T_2 par une suite finie de "mouvements de Markov" que nous allons décrire.

Il y a deux types de mouvements de Markov.

Type 1 : On transforme T en σ_i o T o σ'_i ou en σ'_i o T o σ_i. Cela revient à permuter les brins i et i+1. En effet désignant la tresse T par la "boite noire" T on a l'équivalence :

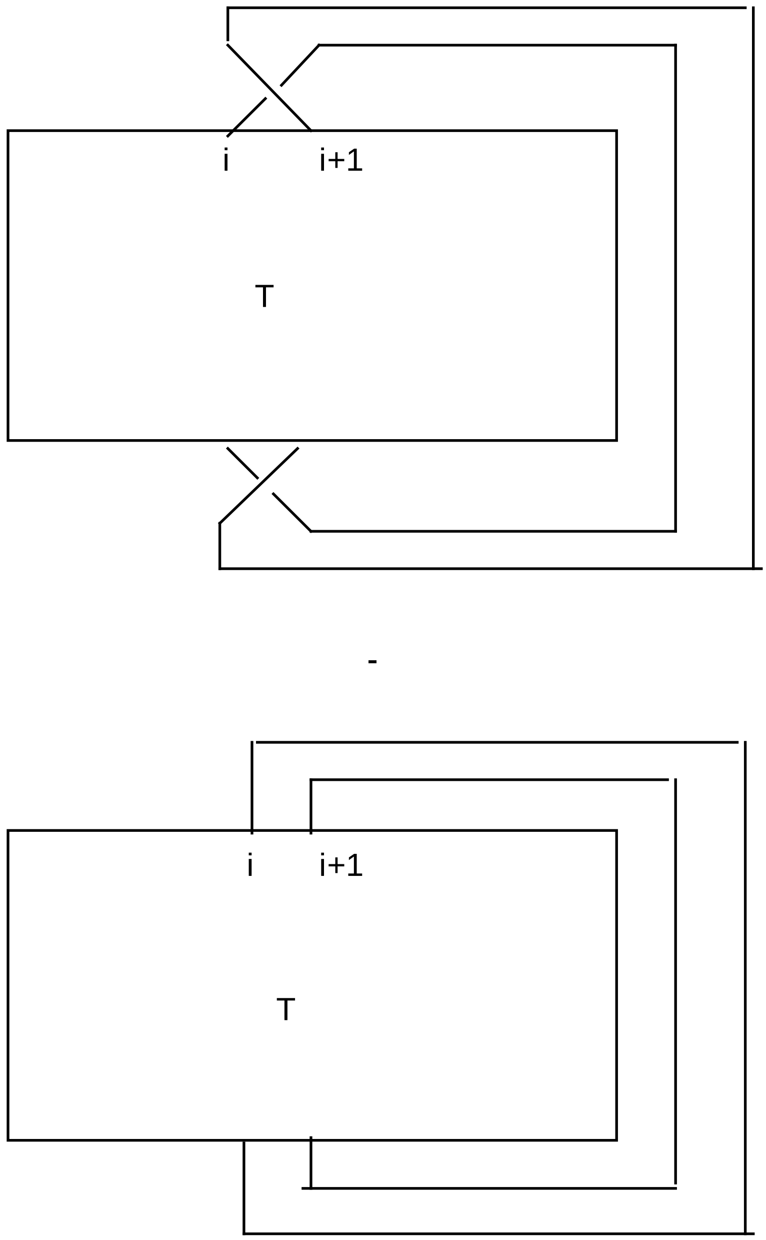


Fig 17

qui permute bien les brins de numéros i et i+1. L’équivalence des entrelacs des figures 15 et 16 est un exemple de ce mouvement de Markov du premier type

<u>Type 2</u> : Un mouvement de Markov de type 2 modifie le nombre de brins de la tresse d’une unité. Soit T une tresse à n brins. On définit T $*$

σ_n (ou $T * \sigma'_n$) comme suit. C'est une tresse à n+1 brins obtenue en adjoignant un (n+1)-ième brin vertical puis en croisant les deux derniers brins :

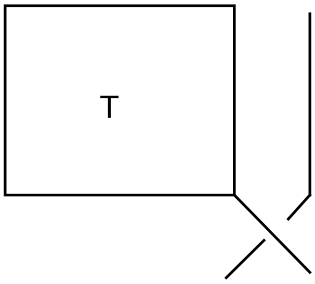


Fig 18

Il est clair que T et $T * \sigma_n$ (et $T * \sigma'_n$) sont des bouclages équivalents comme entrelacs. Un exemple élémentaire de ce mouvement de Markov du deuxième type est l'équivalence de la figure 14.

3. La catégorie des enchevêtrements

Il y a une généralisation assez riche des tresses qui est constituée par ce que l'on appelle des enchevêtrements que nous allons décrire sans trop de détails.

Alors qu'une tresse va de n points vers n points, un enchevêtrement peut aller de n points vers p points. Considérons n points sur un segment et p points sur un autre segment. Un enchevêtrement est un nombre fini d'arcs et de cercles que l'on plonge dans l'espace à trois dimension de telle sorte que les arcs aient chaque extrémité en un des n+p points donnés.

En voici quelques exemple :

a) Un nœud ou un entrelacs est un enchevêtrement allant de 0 vers 0 puisqu'il n'y a aucune extrémité.

b) Une tresse à n brins est un enchevêtrement allant de n vers n.

c) Voici un enchevêtrement de 1 vers 3 :[4]

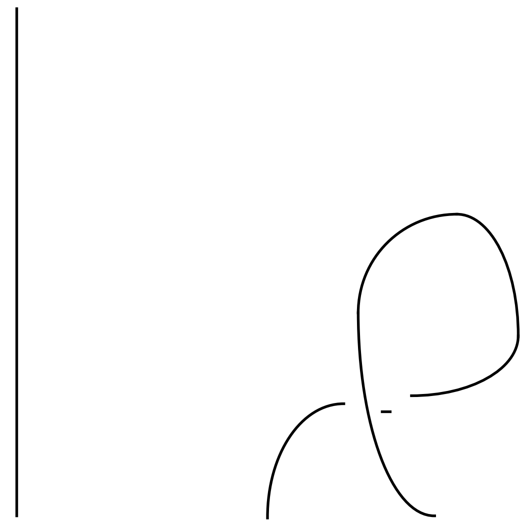


Fig 19

et en voici un autre de 3 vers 1 :

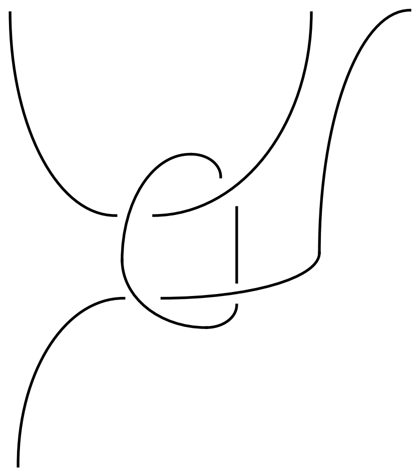


Fig 20

[4] Pour varier les dessins nous n'avons plus dessiné des lignes brisées mais des courbes lisses (ou à peu près lisses!). Cela ne change rien à la théorie.

Evidemment, les enchevêtrements ne forment plus des groupes. Pourtant on peut parfois les composer : si E_1 est un enchevêtrement de n vers p et E_2 est un enchevêtrement de p vers q, on peut définir le composé E_2 o E_1 allant de n vers q en plaçant E_2 en dessous de E_1 et en identifiant les p extrémités de E_1 avec les p origines de E_2. Par exemple si E_1 est l'enchevêtrement de la figure 19 et E_2 celui de la figure 20, E_2oE_1 est l'enchevêtrement de 1 vers 1 qu'est :

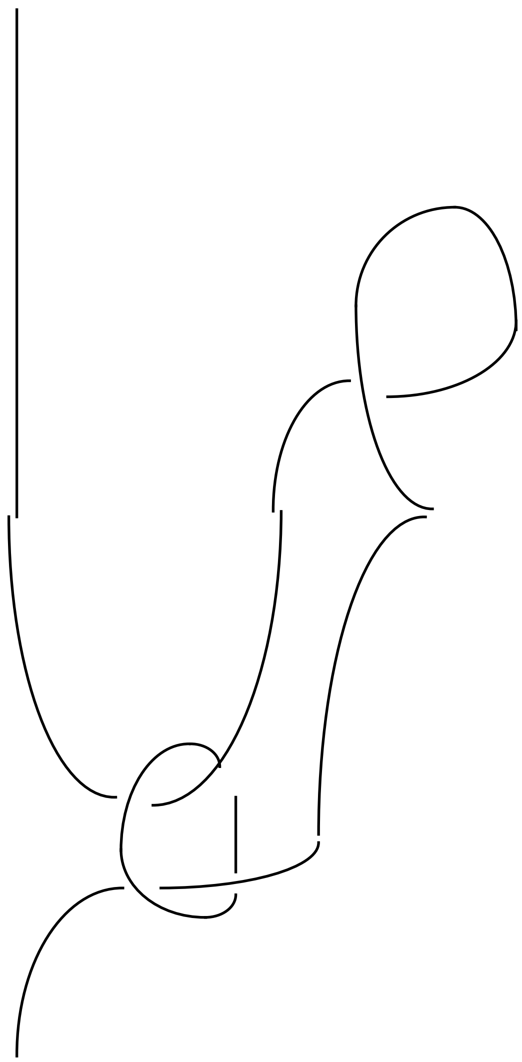


Fig 21

Alors que les tresses se rassemblaient en les groupes B_n, nous avons ici une structure plus faible mais extrêmement générale : les enchevêtrements forment une catégorie.

Ouvrons ici une parenthèse sur ce concept de catégorie. Supposons que nous étudiions un certain type de structure mathématique, disons par exemple la théorie des groupes ou la topologie générale. Nous nous intéressons donc à des objets munis de ces structures: des groupes ou des espaces topologiques dans les deux exemples cités. Mais c'est loin d'être suffisant. Il faut étudier aussi les fonctions, ou transformations, d'un objet vers un autre qui, en un sens à définir pour chaque structure, respectent cette structure. Dans le cas des groupes une transformation utile sera un "homomorphisme" (ou une "représentation") d'un groupe vers un autre, c'est à dire une fonction qui conserve la composition et aussi le passage à l'inverse. Dans le cas de la topologie générale, les fonctions intéressantes d'un espace topologique vers un autre sont les fonctions continues. Dans les deux cas, et dans une multitude d'autres, si A et B sont des objets munis de la structure considérée, une transformation f respectant la structure sera désignée par une flèche f : A ∅B, et nous dirons que f "est une flèche". Dans les deux cas et dans une multitude d'autres, on constate que le composé de deux transformations admissibles est encore une transformation admissible (le composé de deux fonctions continues est continu par exemple) et on constate aussi que la fonction "identité" (c'est-à-dire celle qui ne change rien) est toujours une transformation admissible. L'ensemble des transformations respectant une structure donnée possède donc lui-même, grâce à la composition, une certaine structure : c'est celle de catégorie. Une catégorie C est donc formée d'une classe d'objets C_0 et pour tout couple d'objets A et B de cette classe d'un ensemble C (A,B) de flèches de A vers B . On a aussi la composition d'une flèche de A vers B avec une flèche de B vers C qui donne une flèche de A vers C . Cette composition est associative et les identités sont sans effet pour la composition.

En général les objets d'une catégorie ont une structure très riches et les flèches s'imposent assez facilement lorsque la structure est décrite. Dans le cas des enchevêtrements, on a la situation inverse. Les objets sont particulièrement simples, ce sont au fond les entiers. Mais ce sont les flèches qui sont relativement complexes ; ce sont les enchevêtrements.

Comme dans le cas des tresses on peut réduire les enchevêtrements à des composés d'un petit nombre d'enchevêtrements élémentaires, pourvu qu'on admette aussi une opération de juxtaposition que nous allons décrire : Si E va de n vers p et E' va de n' vers p', on peut placer E' à droite de E et obtenir ainsi un enchevêtrement de n+n' vers p+p'. On désignera ce juxtaposé de E et E' comme E≠E'.

Tout enchevêtrement s'obtient alors au moyen de la composition et de la juxtaposition à partir des enchevêtrement élémentaires suivants : σ de 2 vers 2, σ' de 2 vers 2, τ_1 de 2 vers 0, τ_2 de 0 vers 2 et ε de 1 vers 1 qui sont décrits par les figures ci-après :

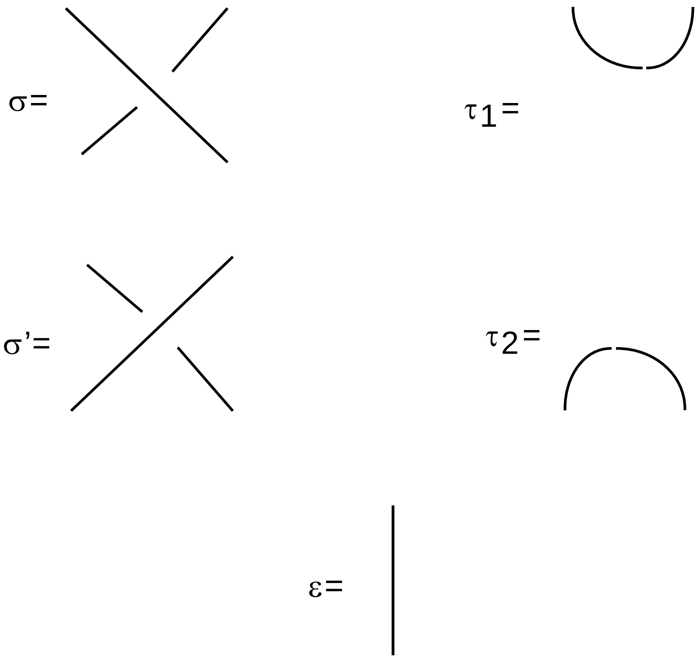


Fig 22

Par exemple τ_1 o τ_2 de 0 vers 0 est le nœud trivial qu'est le simple cercle.

Bien sûr pour avoir une bonne description de la catégorie des enchevêtrements à partir des éléments simples, il faudrait décrire des relations d'équivalences identifiant certains composés. La situation est un peu plus complexe techniquement que dans le cas des tresses ou des entrelacs mais cette complexification technique n’est pas significative au plan philosophique ou structural. Nous pouvons donc laisser cela pour une étude proprement mathématique un peu plus avancée.